

# Végtelenül rendezetlen kritikus viselkedés magasabb dimenziós kvantum rendszerekben

DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

**Kovács István**

Témavezető: Prof. Iglói Ferenc, D.Sc.

Konzulens: Prof. emer. Szépfalussy Péter, D.Sc.

MTA WIGNER Fizikai Kutatóközpont,  
Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Fizika Doktori Iskola

A doktori iskola vezetője: Prof. Csikor Ferenc, D.Sc.

Statisztikus fizika, biológiai fizika és  
kvantumrendszerek fizikája program  
Programvezető: Prof. Kürti Jenő, D.Sc.

Budapest, 2012



# Bevezetés

A fázisátalakulások a legmegdöbbentőbb természeti jelenségek közé tartoznak. Az átalakulás helyén a hőmérséklet kis megváltozásának hatására a rendszer szinguláris módon viselkedik és alapvetően megváltoznak a tulajdonságai. Egy folytonos fázisátalakulás során a rendszer szabadsági fokai makroszkopikusan korrelálttá válnak, így a megjelenő kritikus szingularitások háttérében a kollektív viselkedés áll. Ezzel összhangban a  $\xi$  korrelációs hossz hatványfüggvény szerint,  $\xi \sim \delta^{-\nu}$  alakban divergál a kritikus ponttól való  $\delta$  távolság függvényében. Doktori dolgozatomban folytonos kvantum fázisátalakulásokat vizsgálok, ahol az átalakulást a hőmérsékleti fluktuációk helyett a Heisenberg-féle határozatlansági relációból eredő kvantum fluktuációk hajtják. A folytonos fázisátalakulások legnagyobb jelentőségű vonása az univerzalitásuk: a kritikus viselkedés lényegében független a mikroszkopikus részletektől, csupán a rendszer globális jellemzői számítanak, mint például a térbeli dimenziók száma, a kölcsönhatás hatótávolsága, illetve a rendszer szimmetriái. Következésképpen, gyakran elegendő egyszerűsített modelleket tanulmányozni a valódi rendszerek kritikus viselkedésének leírásához. A valódi rendszerekben vitathatatlanul jelen vannak térbeli inhomogenitások, mint például rácshibák vagy szennyezések. Kondenzált anyagokban ezek dinamikája lassú a kísérleti időskálához képest, így jól modellezhetők időfüggetlen, befagyott rendezetlenséggel. Természetesen merül fel a következő kérdés: Vajon be kell illesztenünk a rendezetlenséget is a modellekbe a nagy skálájú kritikus viselkedés leírásához, vagy ez is csak egy a sok irreleváns mikroszkopikus részlet közül? A tények azt mutatják, hogy az időfüggetlen rendezetlenség drasztikusan megváltoztathatja a tiszta, rendezetlenség nélküli rendszerben megismert kritikus viselkedést. Egy alapvető példa erre a *kvantum Ising modell*:

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x - \sum_i h_i \sigma_i^z, \quad (1)$$

ahol a feles spinek közötti  $J_{ij} \geq 0$  ferromágneses csatolás a  $h_i > 0$  külső mágneses térhez hasonlóan véletlen változó. Zérus hőmérsékleten, kis külső térnél a modell ferromágneses az  $x$  irányban, míg a külső tér erősségét növelve — egy kritikus értéknél — folytonos kvantum fázisátalakulást találunk a paramágneses fázisba. A modellnek számos kísérleti realizációja ismert, ezek közül a legjelentősebbek a  $\text{K}(\text{H}_x\text{D}_{1-x})_2\text{PO}_4$ ,  $\text{Rd}_{1-x}(\text{NH}_4)_x\text{H}_2\text{PO}_4$  és  $\text{LiHo}_x\text{Y}_{1-x}\text{F}_4$  anyagok, amelyekben a rendezetlenség erőssége is szabályozható az  $x$  paraméterrel. A legtöbb kísérleti eredmény a legutóbbi rendszerre ismert, ahol azonban nem csupán lassan lecsengő, oszcilláló előjelű dipól kölcsönhatást találunk, hanem egy longitudinális mágneses teret is. Mindezek eredőjeként a rendszer viselkedése még számos feltáratlan érdekességet tartogat.

A rendezetlenség nélküli tiszta kvantum Ising modell az eggyel magasabb dimenziós klasszikus rendszer jól ismert univerzalitási osztályába tartozik. Annak ellenére, hogy így az egy dimenziós kvantum lánc kritikus viselkedése egzaktul ismert Onsager egzakt megoldásából, a kísérletekhez közelebb álló, rendezetlen esetben nem alkalmazhatóak ezek az eredmények. A megdöbbentő tény ugyanis az, hogy a leggyengébb rendezetlenség is teljesen megváltoztatja a kritikus viselkedést. A megjelenő erős korrelációk, a kvantumfluktuációk, valamint a rendezetlenségi fluktuációk összjátékának eredménye a termodinamikai mennyiségek és a dinamikai

korrelációs függvények erős szingularitása. A rendezetlenség hatása kiterjed a kvantum kritikus régió kívülrre is, az ún. Griffiths-fázisra, ahol a térbeli korrelációk már rövid hatótávolságúak.

Az időfüggetlen rendezetlenség nem csupán a kvantum Ising modellben játszik ilyen fontos szerepet, hanem számos más kvantum és klasszikus rendszerben, ilyen például az egydimenziós véletlen bolyongás, az egydimenziós Hubbard modell, a kétdimenziós Mott fémszigetelő átmenet, rendezetlen polimer lokalizációja egy felületen, az aszimmetrikus kizárási folyamat és csapdázási modellek, hajtott rácsgázok és reakció-diffúzió rendszerek, valamint számos klasszikus és kvantum spinrendszer. A jelenség megértésében kiemelkedő jelentőségű az *erősen rendezetlen renormálási csoport* (SDRG) technika, ami egydimenzióban egzakt analitikus eredményeket szolgáltat. A legfontosabb eredmény, hogy a kritikus pontban *végtelenül rendezetlen viselkedés* figyelhető meg, az eredeti paraméterek rendezetlenségének erősségétől és alakjától függetlenül. A renormálási eljárás során a rendezetlenség erőssége minden határon túl nő egyre nagyobb skálán tekintve, így dominánssá válik a kvantum fluktuációk felett. A kritikus pontban a rendszer dinamikája extrém lassúvá válik, ami formálisan végtelenül nagy  $z$  dinamikai exponenst eredményez. A  $\tau$  idő- és  $L$  hosszúságskála közötti szokásos  $\tau \sim L^z$  hatványfüggvény alakú kapcsolat helyett gyökeresen eltérő, ún. *aktivált* viselkedést látunk, ami egy új,  $\psi$  exponenssel jellemezhető:

$$\log \tau \sim L^\psi \quad (2)$$

A kritikus pontban a rendszer nagy skálán is heterogén és a rendszerméret növekedtével szélesedik a fizikai mennyiségek eloszlása. Az átlagos és tipikus értékek lényegesen eltérnek egymástól, hányadosuk is szinguláris. Az átlagokat a ritka régiók illetve realizációk dominálják, így ezek korrekt kiszámításához igen nagyszámú mintára kell elvégezni az elemzéseket. A kritikus viselkedést 3 független exponenssel jellemezhetjük, a  $\nu$  és  $\psi$  exponensen felül célszerű az  $m$  mágneszettség  $m \sim L^{-x}$  méretfüggését leíró  $x$  exponenst választani. Egydimenzióban a kritikus exponensek egzaktul ismertek Daniel Fisher 1994-es munkáinak köszönhetően:

$$\nu(1D) = 2, \quad x(1D) = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \quad \psi(1D) = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Sajnos magasabb dimenziós rendszereken az eljárás csak numerikusan, komoly erőforrásigénnyel alkalmazható. Két dimenzióban eddig csupán relatíve kis ( $L \sim 100$ ) méretek viszonylag pontatlan vizsgálatát tette ez lehetővé, ahogy az az 1. táblázatban látható. Bár az eredmények egyértelműen jelzik a végtelenül rendezetlen ( $\psi > 0$  és  $\nu > 1$ ) kritikus viselkedést, a  $\psi$  exponens értékében komoly bizonytalanság látható.

A kísérletileg fontos három dimenziós esetben ezidáig nem sikerült számszerű eredményeket elérni. Egy 2000-ben elvégzett közelítő numerikus eljárás alapján valószínűsíthető (Motrunich és tsai), hogy a kritikus viselkedés itt is végtelenül rendezetlen, a kritikus exponensekre azonban becslések sincsenek. A Harris-kritérium szerint 4 dimenzióban és előlött a gyenge rendezetlenség irreleváns, ez azonban nem zárja ki a végtelenül rendezetlen kritikus viselkedést erősebb kezdeti rendezetlenség esetén. Bár ezidáig nem történtek vizsgálatok 4 és magasabb dimenziós rácsokon, elméleti szempontból egy érdekes nyitott kérdés, hogy van-e egy véges felső kritikus dimenzió, ami felett már nem találunk végtelenül rendezetlen viselkedést. A magas

1. táblázat. A két dimenziós rendezetlen kvantum Ising modell kritikus exponenseire vonatkozó becslések a növekvő szélességű létrák alapján extrapolált saját eredményeimmel. QMC: kvantum Monte Carlo, MC: az ugyanebbe az univerzalitási osztályba tartozó *kontakt folyamatra* kapott Monte Carlo eredmények.

$\psi$	$\nu$	$x$	módszer	
0.4(1)	1.07(15)	1.0	QMC	Pich és tsai (1998)
0.42(6)		1.0(1)	SDRG	Motrunich és tsai (2000)
0.5		0.94	SDRG	Lin és tsai (2000)
0.6	1.25	0.97	SDRG	Karevski és tsai (2001)
0.51(6)	1.20(15)	0.96(2)	MC	Vojta és tsai (2009)
0.51(2)	1.25(3)	0.996(10)	SDRG	saját [5] (2009)

dimenziós határeset kísérletileg is érdekes lehet hosszú hatótávolságú kölcsönhatás esetén, mint amilyen a  $\text{LiHo}_x\text{Y}_{1-x}\text{F}_4$  rendszerben jelen lévő dipól kölcsönhatás.

A fenti kérdéseken túl a kvantum fázisátalakulások elméletének egyik legnagyobb kihívása azoknak a vonásoknak a megértése, amik klasszikus elméletekben nincsenek jelen. A részrendszerek *összefonódása* egy ilyen alapvető jellemző, amit intenzíven vizsgálnak az irodalomban. Jelenleg az is egy érdekes nyitott kérdés, hogy hogyan is lehet egy tet-szőleges kvantumállapotban számszerűsíteni a részrendszerek összefonódását. Egy egyértelmű hullámfüggvénnyel leírható „tisztá” állapotban azonban — mint amilyen egy degenerátatlan alapállapot — az *összefonódási entrópia* egy közismerten jó választás. A klasszikus fizikával ellentétben egy részrendszer — például egy spin — több állapotban lehet akkor is, ha az egész rendszer egy jól definiált kvantumállapotban van. Az összefonódási entrópiát úgy képzelhetjük el, mint a részrendszer (számottevő valószínűséggel megvalósuló) lehetséges állapotainak a számának a logaritmusát. Véges korrelációs hossz esetén az az általános várakozás, hogy az összefonódási entrópia a részrendszer felületével arányos, ez az ún. *felületi törvény*. A kritikus pontban azonban a korrelációs hossz divergál, így eltérést tapasztalhatunk ettől.

Egydimenzióban az alapvető eredmény az, hogy az összefonódási entrópia *logaritmikusan divergál* a részrendszer  $\ell$  mérete szerint a kritikus pontban és a logaritmus előfaktora univerzális. A számos következmény közül a legjelentősebb, hogy ez a szingularitás közvetlenül alkalmazható a kritikus pont lokalizálására kvantum modellekben. Azaz, csupán az összefonódási entrópiát vizsgálva megállapítható a fázisátmenet akkor is, ha az egyes fázisok természete és az azokat leíró rendparaméter nem ismert. Sajnos a technikai nehézségek következtében magasabb dimenziós kölcsönható kvantum rendszerekben alig vannak eredmények. Kivételt képez ez alól a rendezetlen kvantum Ising modell, ahol az SDRG eljárás lehetővé teszi az összefonódási entrópia kiszámítását is. Ezidáig a módszert csak két dimenzióban sikerült alkalmazni, ahol a kis méretek miatt egymással ellentmondó következtetések születtek a felületi törvény érvényességéről.

Bár az értekezés a kvantum Ising modell fogalomkörére épül, számos más kvantum és klasszikus rendszer is ugyanebbe az univerzalitási osztályba tartozik. Az egyik legintenzívebben vizsgált példa az egyszerű betegségterjedési modellben, a kontakt folyamatban megfigyelhető nemegyensúlyi fázisátalakulás a makroszkopikusan beteg és egészséges állapotok között. A renormálási egyenletek hasonlósága folytán a kvantum Ising modellre kapott eredmények erre

az esetre is közvetlenül alkalmazhatóak.

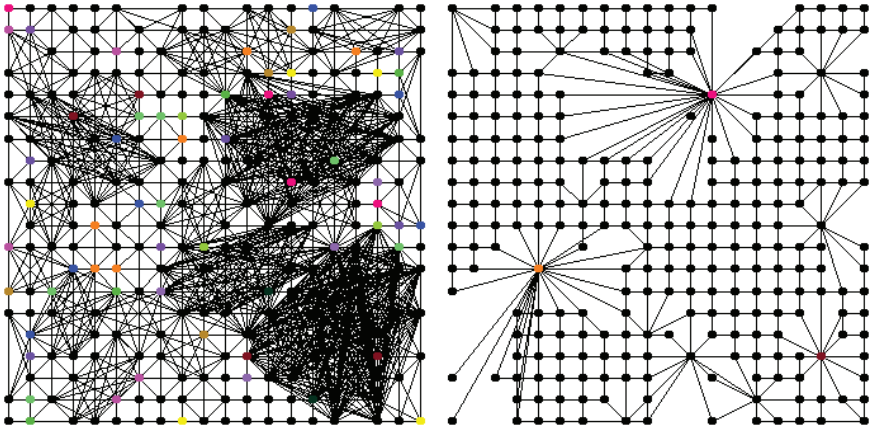
## Célkitűzések

- Magasabb dimenziós rendezetlen kvantum Ising modell vizsgálata a kritikus pontban:
  - elsősorban a kétdimenziós eredmények pontosítása és kiegészítése,
  - valamint a gyakorlati szempontból jelentős 3 dimenziós eset tanulmányozása, amire vonatkozóan korábban nem sikerült számszerű eredményeket elérni,
  - ezeken túlmenően a felső kritikus dimenzió kérdésének vizsgálata;
- magasabb dimenziós rendezetlen kvantum Ising modell vizsgálata a kritikus ponton kívül, a Griffiths-fázisban, ahol még nem történtek szisztematikus vizsgálatok;
- dimenzionális átmenetek, konkrétan az 1 és 2 dimenzió közötti létrák vizsgálata;
- rendezetlen kölcsönhatási geometriák, konkrétan a végtelen dimenziós Erdős-Rényi véletlen gráfok vizsgálata, amik a hosszú hatótávolságú kvantum Ising modellen kívül a társadalmi és egyéb hálózatokon zajló kontakt folyamat esetén is különösen érdekesek;
- alapállapotú összefonódottság vizsgálata az SDRG eljárás eredményeire támaszkodva:
  - tisztázni 2 (és esetleg még magasabb) dimenziós rendszerekben a kritikus összefonódási entrópia skálázását, ahol eddig ellentmondó eredmények születtek a felületi törvény érvényességéről;
  - megvizsgálni, hogy magasabb dimenziós rendszerekben teljesül-e az az általános érvényű sejtés, hogy az összefonódási entrópia a kritikus pontban maximális, a divergáló korrelációs hosszaknak megfelelően.

## Alkalmazott módszer: az erősen rendezetlen renormálási csoport (SDRG) eljárás

Az időfüggetlen rendezetlenség következményeinek vizsgálatában alapvető jelentőségű az erősen rendezetlen renormálási csoport technika, amit az egydimenziós kvantum Ising modellre Daniel Fisher alkalmazott elsőként 1994-ben. Ő mutatta meg, hogy a kritikus pont végtelenül rendezetlen viselkedést mutat és hogy ez az eljárás aszimptotikus egzaktasághoz vezet. Ellentétben a szokásos renormálási eljárásokkal, amik a rendszert homogén módon kezelik (pl. szabályos blokkokat képeznek), az SDRG eljárás térben teljesen heterogén módon kezeli a rendszert. Az eljárás során minden egyes renormálási lépésben megkeressük a maximális  $J$  vagy  $h$  csatolást a rendszerben és „kidecimáljuk”, azaz eltüntetjük a rendszerből, miközben perturbatív módon új effektív csatolásokat generálunk. Ez annak felel meg, hogy a maximális gerjesztési energiájú állapotokat egymás után elhagyjuk, egyre inkább csak az alacsony energiájú viselkedésre koncentrálva. Az SDRG eljárást numerikusan alkalmazva egy  $N$  spinből álló rendszerben minden

lépésben eggyel csökken a spinek száma, míg végül egyetlen effektív spin írja le a rendszert. Ennek a spinnek a mérete adja meg a rendszer mágnesezettségét, míg a külső tere a legalacsonyabb gerjesztési energiát.



1. ábra. Pillanatkép a hagyományos és az általam kidolgozott ekvivalens, új renormálási algoritmusról. Míg a hagyományos eljárás során rengeteg új csatolás generálódik  $t \sim \mathcal{O}(N^3)$  futásidőt eredményezve, az új eljárásban a csatolások csupán törlődnek a rendszerből, ami nagyságrendekkel gyorsabb,  $t \sim \mathcal{O}(N \log N)$  futásidőhöz vezet  $N$  spin esetén.

Magasabb dimenziós rendszerekben számos effektív csatolás generálódik az eljárás során, ami  $\mathcal{O}(N^3)$  futásidőhöz és  $\mathcal{O}(N^2)$  memóriaigényhez vezet  $N$  spin esetén.

## Eredmények

1. Munkám során jelentősen továbbfejlesztettem az erősen rendezetlen renormálási csoport eljárást:

- Bebonyítotam, hogy az SDRG eljárásban rutinszerűen használt technikai lépés, az ún. maximum-szabály a renormálási eljárás nagymértékű egyszerűsítését teszi lehetővé [4]. Az eljárásra vonatkozó sejtések bizonyítására alapozva több különböző, egyre hatékonyabb algoritmust dolgoztam ki, amik ekvivalens eredményt adnak a hagyományos SDRG módszerrel. Végül a naiv algoritmus  $\mathcal{O}(N^3)$  futásidejét sikerült  $\mathcal{O}(N \log N)$ -re leszorítani tetszőleges dimenziós rendszerekre [2,3] (1. ábra).
- Így a korábbiaknál lényegesen nagyobb rendszerek váltak elérhetővé, 2 dimenzióban például az eddigi  $L \sim 100$  helyett egészen  $L = 2048$ -as lineáris méretig [4], de magasabb dimenzióban is több millió spinre elvégezhetővé váltak az elemzések, több tízezer rendezetlen realizációt alkalmazva.
- Az SDRG eljárásra kidolgozott hatékony algoritmust kiterjesztettem más modellekre is, így a kvantum Potts modellre, valamint a szupravezető anyagok leírására is

használt kvantum rotor modellre [2].

- Magasabb dimenziós rendszerekben az egyik első numerikus probléma, amivel szembeesünk, a kritikus pont elegendő pontosságú meghatározása. Munkám során kiterjesztettem a duplázási eljárást magasabb dimenziós rendszerekre, amivel mintánként definiáltam egy pszeudo-kritikus pontot. A pszeudo-kritikus pontok eloszlásának méretfüggéséből lehetővé vált a kritikus pont precíz meghatározásán túl a korrelációs hossz kritikus exponensek kiszámítása is [4,5].
- A témában elsőként kétféle speciálisan megválasztott rendezetlenséget is alkalmaztam, ami azon túl, hogy illusztrálta a kapott eredmények kezdeti rendezetlenségtől való függetlenségét a kritikus pontban, pontosabb számértékek elérését is lehetővé tette, elsősorban a megjelenő véges-méret korrekciók ellenkező előjelének köszönhetően.

2. Végtelenül rendezetlen kritikus viselkedést találtam a kvantum Ising modellben létrákon és 2, 3 és 4 dimenziós rácsokon éppúgy, mint a végtelen dimenziós határesetnek megfelelő Erdős-Rényi véletlen gráfokon. Minden esetben meghatároztam a kritikus exponensek számszerű értékeit is, amiket az 1. táblázatban tüntettem fel.

- Az 1 és 2 dimenzió közötti létrák esetében  $w = 20$ -as szélességig számolva azt találtam, hogy a renormálási eljárás komplikáltabb volta ellenére a létrák is egydimenziósként viselkednek, hasonlóan az irodalomból ismert  $w = 2$ -es esethez. Ugyanakkor a skálázási paraméterek  $w$ -függésének vizsgálatával lehetővé vált extrapolálni a kétdimenziós rendszerre.
- 2 dimenzióban az új módszerrel lehetővé vált a kritikus exponensek, valamint a skálafüggvények alakjának precíz meghatározása. Az elért eredmények a jelenleg ismert legpontosabbak [4], beleértve az irodalomban a kontakt folyamatra kapott, 40000 processzor-napnyi Monte Carlo szimulációval kapott értékeket is.
- 3 dimenzióban a kritikus pont lokalizálása után elsőként sikerült meghatároznom a kritikus exponenseket [3] és ezzel kimutatnom a végtelenül rendezetlen viselkedést.
- Az új renormálási módszer 4 dimenzióban is lehetővé tette a kritikus pont és a kritikus exponensek meghatározását, ami a 4 dimenziós végtelenül rendezetlen kritikus viselkedés első kimutatását jelentette [3].
- Még magasabb dimenziós rendszerekben a közvetlen vizsgálatok elsődleges akadálya a kritikus pont precíz meghatározásának nehézsége. A problémát megkerülendő, véges dimenziós rácsok helyett Erdős-Rényi véletlen gráfokat tekintettem, amik közvetlenül a végtelen dimenziós határesetnek felelnek meg. Azt találtam, hogy az effektív csatolások logaritmusainak eloszlása — a végtelenül rendezetlen viselkedés jeleként — ebben az esetben is szélesedik. Ahogy az a 2. ábrán látható, a kritikus exponensek a véges dimenziós értékek trendjére illeszkednek [2,3].

3. Módszeremet a kritikus ponton kívül, a Griffiths-fázisban alkalmazva megadtam a magasabb dimenzióban várt skálázási összefüggések első szisztematikus vizsgálatát.



- Magasabb dimenziós rendszerekben a skálaviselkedés lényegesen eltér a rendezett és rendezetlen Griffiths-fázisban, az utóbbiban sokkal erősebb szingularitásokhoz vezetve. Az eredményeim minden esetben összhangban vannak a skálázási jöslatokkal.
  - Megmutattam továbbá, hogy a rendezetlen Griffiths-fázisban az energiárés logaritmusának eloszása a Fréchet-eloszással írható le 2, 3 és 4 dimenzióban is.
4. Megvizsgáltam a kritikus összefonódási entrópia skálázását is egy új hatékony algorit-mussal és azt találtam, hogy 2, 3 és 4 dimenzióban is érvényes a felületi törvény, amihez univerzális logaritmusos korrekció társul a sarkok következtében. A  $b \ln \ell$  alakú korrekció univerzális  $b$  előfaktorának értékeit az 1. táblázatban tüntettem fel.
- Az összefonódási entrópia kiszámítása hagyományosan  $\mathcal{O}(N^2)$  időt igényel, ami a gyakorlatban lényegesen kisebb rendszerméreteket elemzését teszi lehetővé, mint az ehhez szükséges klaszterszerkezetet előállító SDRG eljárás. Ezt a problémát megoldandó, levezettem egy egzakt analitikus formulát az összefonódási entrópiára a klaszterszerkezet ismeretében [1]. A klaszter méretének növekedtével azonban a for-mula kiértékelése exponenciálisan sok időbe telik, ezért kidolgoztam egy kombinált analitikus-numerikus módszert, amivel már el lehetett érni az SDRG eljárás által kínált rendszerméreteket.
  - Létrak esetében az összefonódási entrópia vezető rendben nem növekszik a létrak szélességével, hanem megmarad az egydimenziós értéknél. A logaritmusos divergen-ciához társuló további korrekciók vizsgálata azonban arra enged következtetni, hogy 2 dimenzióban már teljesül a felületi törvény [5].
  - Két dimenzióban az összefonódási entrópiát meghatározva tisztáztam, hogy vezető rendben a felületi törvény érvényes, valamint hogy az első korrekció logaritmu-san divergál a kritikus pontban. Megmutattam, hogy a logaritmusos korrekció a részrendszer sarkainak a következtében jelenik meg és előfaktora az alkalmazott ren-dezetlenségtől független, univerzális szám [1].
  - Az eddig még nem vizsgált 3 és 4 dimenziós esetben is megmutattam a felületi törvény érvényességét, valamint hogy a részrendszer sarkai ezekben az esetekben is univerzális, logaritmusos korrekcióhoz vezetnek.
  - Megmutattam, hogy a (hiper)körös részrendszer  $0 < E < d - 1$  dimenziós élei  $\ell^E$  alakú korrekciókhoz vezetnek a felületi törvényhez, azonban ezek nem univerzálisak és nem divergnak a kritikus ponthoz közeledve.
  - Az összefonódási entrópiát a kritikus ponton kívül elemelve azt találtam, hogy magasabb dimenzióban az összefonódási entrópia helyett csupán a sarkokból származó része divergál a kritikus pontban és hogy ez a divergáló korrelációs hossz következménye.
  - Végül, az SDRG eljárás tulajdonságait felhasználva megadtam egy általános, kvali-tatív levezetést a sarkok logaritmusos járulékára, ami az előfaktor váltakozó előjelét is megadja a dimenziók számával.

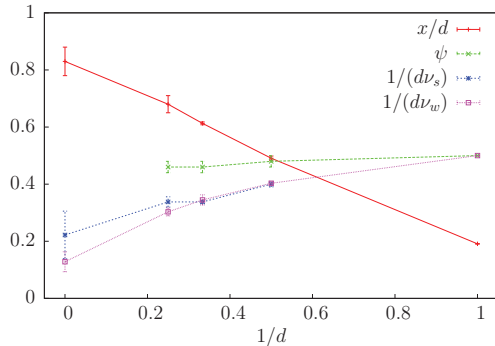
2. táblázat. Az univerzális kritikus paraméterek általam meghatározott értékei a magasabb dimenziós rendezetlen kvantum Ising modellben az egydimenzióban egzaktul ismert értékek tükrében. Az egyes esetekben elért legnagyobb rendszerméretet  $N_{max}$  jelzi.

	1D	2D	3D	4D	E.-R. gráfok
$N_{max}$	(exact)	$2048^2 \approx 4.2 \times 10^6$	$128^3 \approx 2.1 \times 10^6$	$48^4 \approx 5.3 \times 10^6$	$2^{22} \approx 4.2 \times 10^6$
$d\nu_w$	2	2.48(4)	2.90(15)	3.30(15)	7.8(20)
$d\nu_s$	(no shift)	2.50(6)	2.96(5)	2.96(15)	4.5(15)
$x/d$	$\frac{3-\sqrt{5}}{4} \approx 0.191$	0.491(8)	0.613(5)	0.68(3)	0.83(5)
$\psi$	0.5	0.48(2)	0.46(2)	0.46(2)	—
$b$	$1/6 \approx 0.1667$	$-0.029(1)$	$0.012(2)$	$-0.006(2)$	—

## Következtetések

Eredményeim összességében arra engednek következtetni, hogy felső kritikus dimenzió nélkül, tetszőlegesen magas dimenziós rácsokon is megfigyelhető a végtelenül rendezetlen kritikus viselkedés. Ennek következményeként a kritikus exponensek értékeit az SDRG eljárás minden esetben aszimptotikusan egzaktul adja meg.

A rendezetlen kvantum Ising modellbeli összefonódási entrópia tetszőleges dimenzióban teljesíti a felületi törvényt, amihez szinguláris logaritmikus korrekció társul a kritikus pontban, univerzális előfaktoral. A szingularitás a divergáló korrelációs hossz következménye és a sarkokon keresztül jelenik meg. Magasabb dimenziós rendszerekben az összefonódási entrópia helyett a szintén közvetlenül számolható sarok járuléka alkalmazható a kritikus pont lokalizálására.



2. ábra. A rendezetlen kvantum Ising modell kritikus exponensei  $1/d$  függvényében, ahol  $d$  a dimenziót jelöli.  $1/d = 0$ -nál az Erdős-Rényi véletlen gráfok adatait láthatjuk, amik jól illeszkednek a véges dimenziós adatok trendjére.

## Az értekezés alapjául szolgáló közlemények

1. I. A. Kovács and F. Iglói (2012) Universal logarithmic terms in the entanglement entropy of 2d, 3d and 4d random transverse-field Ising models, *Europhysics Letters* **97**, 67009. [arXiv:1108.3942](#)
2. I. A. Kovács and F. Iglói (2011) Renormalization group study of random quantum magnets, *J. Phys.: Condens. Matter* **23** 404204. [arXiv:1109.4267](#)
3. I. A. Kovács and F. Iglói (2011) Infinite-disorder scaling of random quantum magnets in three and higher dimensions, *Phys. Rev. B* **83**, 174207. [arXiv:1010.2344](#)
4. I. A. Kovács and F. Iglói (2010) Renormalization group study of the two-dimensional random transverse-field Ising model, *Phys. Rev. B* **82**, 054437. [arXiv:1005.4740](#)
5. I. A. Kovács and F. Iglói (2009) Critical behavior and entanglement of the random transverse-field Ising model between one and two dimensions, *Phys. Rev. B* **80**, 214416. [arXiv:0909.4442](#)

## A témához kapcsolódó további közlemények:

6. M. Karsai, I. A. Kovács, J-Ch. Angles d'Auriac and F. Iglói (2008) Density of critical clusters in strips of strongly disordered systems. *Phys. Rev E* **78** 061109. [arXiv:0805.2006](#)
7. F. Iglói and I. A. Kovács (2008) Griffiths-McCoy singularities in random quantum spin chains: Exact results. *Phys. Rev. B* **77** 144203. [arXiv:0803.2617](#)